2変数退化Garnier系の初期値空間について (Painleve系と超幾何系)

鈴木, 正樹

数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 41-52

2変数退化Garnier系の初期値空間について

鈴木正樹 (Masaki Suzuki)　神戸大 自然科学 (Kobe Univ)

1 序論

n 変数 Garnier 系とは n+3 個の確定特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の２階線形常微分方程式の monodromy 保存変形より得られる n 個の時間変数を持つ Hamilton 系である。n=1 のときは Painlevé VI型方程式と一致する。

n=1 のときこの Haimlton 系及び退化した Hamilton 系、すなわち Painlevé 系の定める解曲線全体は岡本和夫氏によって構成された初期値空間により幾何的に捉えることができる [6]。また n 変数 Garnier 系の初期値空間は木村弘信氏が構成しており [2]、さらに木村氏は n=2 のとき１つ退化した G(1,1,1,2) の初期値空間の構成もした [3]。

この小文の目的は n=2 の Garnier 系が退化して得られる Hamilton 系のなかで特に G(1,1,3) 型の方程式系に対してその大域的な解全体を捉える定義多様体（初期値空間）を具体的に構成することである。

本文の記号として、確定特異点に１を r 級不確定特異点に r+1 を対応させこの組で退化 Garnier 系を表すことにする。例えば、線形常微分方程式が２個の確定特異点と１個の２級不確定特異点をもつ場合の退化 Garnier 系を G(1,1,3) と表す。

2 2変数退化 Garnier 系

２変数退化 Garnier 系について次の退化図式が知られている [1]。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & G(1,1,3) & \rightarrow & G(1,4) & & \\
 & \nearrow & & & & \searrow & \\
G(1,1,1,1,1) \rightarrow G(1,1,1,2) & & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & & G(5) \\
 & \searrow & & & & \nearrow & \\
 & & G(1,2,2) & \rightarrow & G(2,3) & &
\end{array}
$$

$\mathbb{P}^1$ 上の２階線形微分方程式

$$
\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(x,t)\frac{dx}{dt} + p_2(x,t) = 0 \tag{1}
$$

で、$p_1(x,t), p_2(x,t)$ が x の有理関数であるものを考える。

2.1 G(1,1,3)

微分方程式 (1) で特異点 $x=0,1,\lambda_1,\lambda_2,\infty$ を持ち、その Riemann scheme が

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \lambda_k & \infty \\ 0 & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0}^{} & & & 0 & \nu \\ \alpha_0 & \eta t_1^2/2 & -\eta t_2 & \alpha_1 & 2 & \nu+\alpha_\infty \end{pmatrix}$$

であるのもを考える。但し、特異点 λ_1,λ_2 は見かけの特異点であるとする。Riemann scheme で、ν は Fuchs-Hukuhara の関係式より

$$\nu = -\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1-1+\alpha_\infty)$$

と定まり、$p_1(x,t), p_2(x,t)$ は次の形に決まる。

$$\begin{aligned} p_1(x,t) &= \frac{1-\alpha_0}{x}+\frac{\eta t_1^2}{(x-1)^3}-\frac{\eta t_2^2}{(x-1)^2}+\frac{3-\alpha_1}{x-1}-\sum_k \frac{1}{x-\lambda_k} \\ p_2(x,t) &= \frac{\nu(\nu+\alpha_\infty)}{x(x-1)}+\frac{t_1K_1-(t_1^2-t_2)K_2}{x(x-1)^2}+\frac{t_1^2K_2}{x(x-1)^3}-\sum_k \frac{\lambda_k(\lambda_k-1)\mu_k}{x(x-1)(x-\lambda_k)} \end{aligned}$$

λ_1,λ_2 が見かけの特異点であることより K_1,K_2 は t,λ,μ の有理関数として定まることが分かる。微分方程式 (1) において monodromy 保存変形を考える。以下、パラメータはまとめて $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_\infty,\eta)$ で表す。

Proposition 2.1 (H.Kimura) (1) の解の基本形の monodromy や stokes 係数が t に依存しないための必要十分条件は $(\lambda(t),\mu(t))$ が次の Hamilton 系 $\mathcal{K}(\alpha)$ を満たすことである。

$$d\lambda_k = \sum_{i=1,2}\frac{\partial K_i}{\partial \mu_k}dt_i, \quad d\mu_k = -\sum_{i=1,2}\frac{\partial K_i}{\partial \lambda_k}dt_i$$

Hamiltonian K_i は λ_i,μ_i の有理関数になっているが、次の変換によって多項式 Hamiltonian に移すことができる。K_i の具体的な形は [1] を参照。

変換 $F:(t,\lambda,\mu)\to(s,q,p)$ を

$$s_1=\frac{1}{2}t_1^2+t_2, \quad s_2=t_1$$

$$q_1=\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{t_1^2}, \quad q_2=-\frac{2-\lambda_1-\lambda_2}{t_1}-\frac{t_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{t_1^3}$$

及び条件

$$\sum_k p_k dq_k \equiv \sum_k \mu_k d\lambda_k \qquad mod \quad dt_1, dt_2$$

で定める。これは正準変換である。具体的には

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{(t_1^2+(1-\lambda_1)t_2)\mu_1+(t_1^2+(1-\lambda_2)t_2)\mu_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ p_2 &= -\frac{t_1\{(1-\lambda_1)\mu_1-(1-\lambda_2)\mu_2\}}{\lambda_1-\lambda_2} \end{aligned}$$

Theorem 2.2 (H.Kimura) 上に定めた正準変換によって Hamilton 系 $\mathcal{K}(\alpha)$ は

$$dq_k = \sum_{i=1,2} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} dt_i, \quad dp_k = -\sum_{i=1,2} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} dt_i$$

にうつされる。ここで H_1, H_2 は $\mathbb{C}(s)[q,p]$ の元で

$$\begin{aligned} H_1 &= q_1^3p_1^2 + 2q_1^2(q_2+\frac{1}{s_2})p_1p_2 + q_1\{q_2(q_2+\frac{1}{s_2}) - (\frac{s_1}{s_2^2}+\frac{1}{2})q_1\}p_2^2 \\ &\quad -\{(\alpha_0+\alpha_1-1)q_1^2 + \eta(q_1+\frac{q_2}{s_2})\}p_1 \\ &\quad -\{(\alpha_0+\alpha_1-1)q_1q_2 + \frac{\alpha_1}{s_2}q_1 - \eta(\frac{s_1}{s_2^2}-\frac{1}{2})q_2 + \frac{\eta}{s_2}\}p_2 \\ &\quad +\nu(\nu+\alpha_\infty)q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= q_1^2(q_2+\frac{1}{s_2})p_1^2 + 2q_1\{q_2(q_2+\frac{1}{s_2}) - q_1(\frac{s_1}{s_2^2}+\frac{1}{2})\}p_1p_2 \\ &\quad +\{q_2^2(q_2+\frac{1}{s_2}) + (\frac{s_1^2}{s_2^3}-\frac{s_2}{4})q_1^2 - (\frac{s_1}{s_2^2}+\frac{3}{2})q_1q_2 - \frac{q_1}{s_2}\}p_2^2 \\ &\quad -\{(\alpha_0+\alpha_1-1)q_1q_2 + \frac{\alpha_1}{s_2}q_1 - \eta(\frac{s_1}{s_2^2})q_2 + \frac{\eta}{s_2}\}p_1 \\ &\quad -\{(\alpha_0+\alpha_1-1)q_2^2 - \{\alpha_0-1+\alpha_1(\frac{s_1}{s_2^2}+\frac{1}{2})\}q_1 \\ &\quad +\{\eta(\frac{s_1^2}{s_2^3}-\frac{s_2}{4}) + \frac{\alpha_1}{s_2}\}p_2 + \nu(\nu+\alpha_\infty)q_2 \end{aligned}$$

で与えられる。

Hamiltonian の形から、Hamilton 系 G(1,1,3)(α) は $B_{113} \times T^*\mathbb{C}^2$、$B_{113} = \mathbb{C}^2 \setminus \{s_2 = 0\}$、上で定義されているものとみなすことができる。

3 対称性

初期値空間の構成に用いる Garnier 系の対称性について述べる。たとえば、$G(1,1,3)(\alpha)$ の対称性とは、双有理的正準変換 $(s,q,p) \to (s',q',p')$ で $G(1,1,3)(\alpha)$ を別のパラ

メータ α' に対する $G(1,1,3)(\alpha')$ に移すものをいう。このような変換全体をつかまえることはできていないが、具体的に以下のものを作ることができる。パラメータ $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_\infty,\eta)$ において α_0 と α_∞ を入れ替える変換を σ とする。

Proposition 3.1 双有理変換 $T:(t,\lambda,\mu)\to(t',\lambda',\mu')$

$$(T)\qquad \begin{cases} t_1'=t_1, & t_2'=-t_1^2-t_2 \\ \lambda_k'=\dfrac{1}{\lambda_k}, & \mu_k'=-\lambda_k^2\mu_k-\nu\lambda_k \end{cases}$$

変換 T は正準変換で、Hamilton 系 $\mathcal{K}(\alpha)$ を $\mathcal{K}(\sigma:\alpha)$ にうつす。

正準変換 T は変換 F により、$G(1,1,3)(\alpha)$ たちの間の変換を誘導する。それを $\tilde{T}:(s,q,p)\to(s',q',p')$ とする。

Proposition 3.2 双有理的正準変換 $\tilde{T}$ は次で与えられる。

$$(\tilde{T})\qquad \begin{cases} s_1'=-s_1, \quad s_2'=s_2 \\ q_1'=\dfrac{q_1}{(\frac{1}{2}s_2^2+s_1)q_1+s_2q_2+1} \\ q_2'=\dfrac{q_2+s_2q_1}{(\frac{1}{2}s_2^2+s_1)q_1+s_2q_2+1} \\ p_1'=\{(\dfrac{1}{2}s_2^2+s_1)q_1+s_2q_2+1\} \\ \qquad\qquad [\{(-\dfrac{1}{2}s_2^2+s_1)q_1+1\}p_1+\{(-\dfrac{1}{2}s_2^2+s_1)q_2-2s_2\}p_2] \\ p_2'=\{(\dfrac{1}{2}s_2^2+s_1)q_1+s_2q_2+1\}\{s_2q_1p_1+(s_2q_2+1)p_2\} \end{cases}$$

4　初期値空間の構成

4.1　(q,p) 空間の compact 化

(s,q,p) の空間である B 上の fiber 空間 $B\times\mathbb{C}^4=B\times T^*\mathbb{C}^2$ の fiber の compact 化として $B\times\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^2$-bundle を以下のように構成する。$\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ を $\mathbb{P}^2$ の斉次座標、$U_i=\{\xi\in\mathbb{P}^2|\xi_i\neq0\}\simeq\mathbb{C}^2$ を第 i affain 座標近傍とする。$q\in\mathbb{C}^2$ は U_0 の affain 座標である。すなわち

$$q_1=\frac{\xi_1}{\xi_0},\quad q_2=\frac{\xi_2}{\xi_0}$$

$X_i:=B\times U_i\times\mathbb{P}^2(i=0,1,2)$ とおき、この第３成分の $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $\eta^{(i)}$ とする。このとき X_i たちを次の関係で貼り合わせた多様体を X で表す。

$$\eta^{(0)}=g_{i0}\cdot\eta^{(i)}$$

$$g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\nu q_1 & -q_1^2 & -q_1 q_2 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix}, \quad g_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ -\nu q_2 & -q_1 q_2 & -q_2^2 \end{pmatrix}$$

$$X^0 = \bigcup_{i=0}^{2} X_i^0, \quad X_i^0 = \{(s,\xi,\eta^{(i)}) \in X_i | \eta_0^i \neq 0\}$$

とおけば、$D = X \backslash X^0$ は $B \times \mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$-bundle であり、次のことがわかる。

Proposition 4.1 Hamilton 系 $G(1,1,3)(\alpha)$ は $B_{113} \times X$ 上の Pfaff 方程式系 $G(1,1,3)^{(0)}(\alpha)$ に延長され、その特異点は D である。この延長された Pfaff 方程式系は、各 X_i^0 上では X_i^0 における fiber 方向の affain 座標の多項式を Hamiltonian とする Hamilton 系である。

Hamilton 系 $G(1,1,3)(\alpha)$ は Painlevé property をみたすとすると、その任意の解は、B の任意の曲線に沿って meromorphic に解析接続することができる。このことを用いて、D のどのような点が、Pfaff 方程式系の積分多様体の閉包に含まれるかを決定する。このような点集合を accessible singularity と呼ぶことにする。

4.1.1 G(1,1,3)

Proposition 4.2 $G(1,1,3)^{(0)}(\alpha)$ の accessible singularity A は次の 3 つの連結成分 $A_i (i = 0,1,2)$ からなる D の余次元 2 の部分多様体である。

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{(s,\xi,\eta^{(1)})|\xi_0 = 0, \eta_0^{(1)} = \eta_2^{(1)} = 0\} \cup \{(s,\xi,\eta^{(2)})|\xi_0 = 0, \eta_0^{(2)} = \eta_1^{(2)} = 0\} \\
A_1 &= \{(s,\xi,\eta^{(0)})|\xi_1 = 0, \eta_0^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0\} \cup \{(s,\xi,\eta^{(2)})|\xi_1 = 0, \eta_0^{(2)} = \eta_2^{(2)} = 0\} \\
A_2 &= \{(s,\xi,\eta^{(0)})|\xi_0 + (s_1 + \frac{s_2^2}{2})\xi_1 + s_2\xi_2 = 0, \eta_0^{(0)} = 0, 2s_2\eta_1^{(0)} = (2s_1 + s_2^2)\eta_2^{(0)}\} \\
&\quad \cup \{(s,\xi,\eta^{(1)})|\xi_0 + (s_1 + \frac{s_2^2}{2})\xi_1 + s_2\xi_2 = 0, \eta_0^{(1)} = 0, s_2\eta_1^{(1)} = \eta_2^{(1)}\} \\
&\quad \cup \{(s,\xi,\eta^{(2)})|\xi_0 + (s_1 + \frac{s_2^2}{2})\xi_1 + s_2\xi_2 = 0, \eta_0^{(2)} = 0, 2\eta_1^{(2)} = (2s_1 + s_2^2)\eta_2^{(2)}\}
\end{aligned}$$

Proposition 4.3 $\tilde{T}$ は accessible singularity の集合 $\{A_0, A_2\}$ の変換を与える。

	A_0	A_2
$\tilde{T}$	A_2	A_0

4.2 blow up

Hamilton系 $G(1,1,3)(\alpha)$ をXに延長して得られるPfaff方程式系 $G(1,1,3)^{(0)}(\alpha)$ のaccessible singularityには、$G(1,1,3)(\alpha)$ の解で定義される積分多様体たち (foliationのleaf) が入ってきて交わっている可能性がある。そこで、これらのaccessible singularityに沿ったblow upを行うことにより、これらの交わっているleafたちを分離することを考える。

4.2.1 A_0, A_2

多様体Xを A_0 に沿ってblow upして得られる多様体を $X^{(1)}$ で、$D = D^{(0)}$ のproper transformを再び同じ記号 $D^{(0)}$ で、exceptional divisorを $D_0^{(1)}$ で表す。$G(1,1,3)^{(0)}(\alpha)$ から $X^{(1)}$ に誘導されるPfaff方程式系を $G(1,1,3)^{(1)}(\alpha)$ とする。

$(z_0^{(1)}, w_{01}^{(1)}, w_{02}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (z_1^{(1)}, w_{10}^{(1)}, w_{12}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (z_1^{(2)}, w_{21}^{(1)}, w_{22}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3$ をとり次の変換を考える。

$$\xi_0 = z_0^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = z_0^{(1)} w_{01}^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = z_0^{(1)} w_{02}^{(1)}$$

$$\xi_0 = z_1^{(1)} w_{10}^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = z_1^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = z_1^{(1)} w_{12}^{(1)}$$

$$\xi_0 = z_2^{(1)} w_{20}^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = z_2^{(1)} w_{21}^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = z_2^{(1)}$$

exceptional divisorは次で与えられる。

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} &= \{(s,\xi_2,z_0^{(1)},w_{01}^{(1)},w_{02}^{(1)}) | z_0^{(1)} = 0\} \\ &\quad \cup \{(s,\xi_2,z_1^{(1)},w_{10}^{(1)},w_{12}^{(1)}) | z_1^{(1)} = 0\} \\ &\quad \cup \{(s,\xi_2,z_2^{(1)},w_{20}^{(1)},w_{21}^{(1)}) | z_2^{(1)} = 0\} \end{aligned}$$

$G(1,1,3)^{(1)}(\alpha)$ から

$$\begin{aligned} A_{00}^{(1)} &= \{(s,\xi_2,z_0^{(1)},w_{01}^{(1)},w_{02}^{(1)}) = (s,\xi_2,0,\tfrac{1}{\alpha_\infty},w_{02}^{(1)})\} \in D_0^{(1)} \\ A_{01}^{(1)} &= \{(s,\xi_2,z_1^{(1)},w_{10}^{(1)},w_{12}^{(1)}) = (s,\xi_2,0,\alpha_\infty,w_{12}^{(1)})\} \in D_0^{(1)} \\ A_{02}^{(1)} &= \{(s,\xi_2,z_2^{(1)},w_{20}^{(1)},w_{21}^{(1)}) = (s,\xi_2,0,\alpha_\infty w_{21}^{(1)},w_{21}^{(1)})\} \in D_0^{(1)} \end{aligned}$$

がfoliationのsingularityで $D_0^{(1)} \backslash \{A_{00}^{(1)}, A_{01}^{(1)}, A_{02}^{(1)}\}$ はvertical leafであることがわかる。

次に $X^{(1)}$ を $A_{01}^{(1)}$ に沿ってblow upして得られる多様体を $X^{(2)}$ で、$D^{(0)}, D_0^{(1)} \subset X^{(1)}$ のproper transformを再び同じ記号で、新たに現れるexceptional divisorを $D_0^{(2)}$ で表す。

$(z_0^{(2)}, w_{01}^{(2)}) \in \mathbb{C}^2, (z_1^{(2)}, w_{10}^{(2)}) \in \mathbb{C}^2$ をとり次の変換を考える。

$$z_1^{(1)} = z_0^{(2)}, \quad w_{01}^{(1)} = \alpha_\infty + z_0^{(2)} w_{01}^{(2)}$$

$$z_1^{(1)} = z_1^{(2)} w_{10}^{(2)}, \quad w_{01}^{(1)} = \alpha_\infty + z_1^{(2)}$$

$$D_0^{(2)} = \{z_0^{(2)} = 0\} \cup \{z_1^{(2)} = 0\}$$

$G(1,1,3)^{(2)}(\alpha)$ は $(\xi_2, w_{12}^{(1)}, z_0^{(2)}, w_{01}^{(2)}, s)$ の多項式になることがわかる。これは foliation が $(\xi_2, w_{10}^{(1)}, z_0^{(2)}, w_{01}^{(2)}, t) \in \mathbb{C}^4 \times B_{113}$ 空間で特異点をもたず、この部分多様体の点を通る leaf はファイバー空間 $\pi : X^{(2)} \to B_{113}$ のファイバーに transversal であることを意味する。

また、$(\xi_2, w_{10}^{(1)}, z_1^{(2)}, w_{10}^{(2)}) \in \mathbb{C}^2$ は Painlevé property より $G(1,1,3)(\alpha)$ を通る解がない特異点であることがわかる。このような特異点を inaccessible singularity と呼ぶことにする。

Accessible singularity A_2 に対しても上と同様の操作を行い、得られる divisor を $D_2^{(1)}, D_2^{(2)}$ とする。

4.2.2 A_1

前の節と同様の process を accesible singularity A_1 に沿って実行する。以下では、A_1 の近傍だけで考えればよいので前の節と記号を重複させている。

$A_1 \subset X$ に沿って blow up を行い、得られる多様体を $X^{(1)}$ とする。$D^{(0)}$ の proper transform を同じ記号 $D^{(0)}$ で新しく現れる exceptional divisor を $D_1^{(1)}$ で表す。

$(Z_0^{(1)}, W_{01}^{(1)}, W_{02}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_1^{(1)}, W_{10}^{(1)}, W_{12}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_2^{(1)}, W_{21}^{(1)}, W_{22}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3$ をとり次の変換を考える。

$$\xi_1 = Z_0^{(1)}, \quad \eta_0^{(0)} = Z_0^{(1)} W_{01}^{(1)}, \quad \eta_0^{(2)} = Z_0^{(1)} W_{02}^{(1)}$$

$$\xi_1 = Z_1^{(1)} W_{10}^{(1)}, \quad \eta_0^{(0)} = Z_1^{(1)}, \quad \eta_2^{(0)} = Z_1^{(1)} W_{12}^{(1)}$$

$$\xi_1 = Z_2^{(1)} W_{20}^{(1)}, \quad \eta_0^{(0)} = Z_2^{(1)} W_{21}^{(1)}, \quad \eta_2^{(0)} = Z_2^{(1)}$$

exceptional divisor は次で与えられる。

$$D_1^{(1)} = \{Z_0^{(1)} = 0\} \cup \{Z_1^{(1)} = 0\} \cup \{Z_2^{(1)} = 0\}$$

$G(1,1,3)^{(1)}(\alpha)$ より

$$\begin{aligned}
A_{00}^{(1)} &= \{(s, \xi_2, Z_0^{(1)}, W_{01}^{(1)}, W_{02}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, 0, -\tfrac{1}{\xi_2})\} \subset D_1^{(1)} \cap D^{(0)} \\
A_{01}^{(1)} &= \{(s, \xi_2, Z_1^{(1)}, W_{10}^{(1)}, W_{12}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, 0, 0\} \subset D_1^{(1)} \\
A_{02}^{(1)} &= \{(s, \xi_2, Z_2^{(1)}, W_{20}^{(1)}, W_{21}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, -\xi_2, 0)\} \subset D_1^{(1)} \cap D^{(0)}
\end{aligned}$$

が foliation の singularity で $D_1^{(1)}$ の中に誘導された Pfaff 系は $D_1^{(1)}\backslash(D^{(0)}\cap D_1^{(1)})$ に特異点を持たず、$D_1^{(1)}\backslash\{A_{00}^{(1)},A_{02}^{(1)}\}$ は vertical leaf であることがわかる。また $A_{01}^{(1)}$ は inaccessible singularity である。

$D_1^{(1)}$ の部分多様体 $A_{02}^{(1)}$ に沿って2回目の blow up を行い、得られた多様体を $X^{(2)}$ とする。$D^{(0)},D_1^{(1)}$ の porper transform を同じ記号で表し、新しく現れる exceptional divisor を $D_1^{(2)}$ とする。

$(Z_0^{(2)},W_{01}^{(2)},W_{02}^{(2)})\in\mathbb{C}^3,(Z_1^{(2)},W_{10}^{(2)},W_{12}^{(2)})\in\mathbb{C}^3,(Z_2^{(2)},W_{21}^{(2)},W_{22}^{(2)})\in\mathbb{C}^3$ をとり次の変換を考える。

$$Z_2^{(1)}=Z_0^{(2)},\quad W_{20}^{(1)}=-\xi_2+Z_0^{(2)}W_{01}^{(2)},\quad W_{21}^{(1)}=Z_0^{(2)}W_{02}^{(2)}$$

$$Z_2^{(1)}=Z_1^{(2)}W_{10}^{(2)},\quad W_{20}^{(1)}=-\xi_2+Z_1^{(2)},\quad W_{21}^{(1)}=Z_1^{(2)}W_{12}^{(2)}$$

$$Z_2^{(1)}=Z_2^{(2)}W_{20}^{(2)},\quad W_{20}^{(1)}=-\xi_2+Z_2^{(2)}W_{21}^{(2)},\quad W_{21}^{(1)}=Z_2^{(2)}$$

$$D_1^{(2)}\quad=\quad\{Z_0^{(2)}=0\}\cup\{Z_1^{(2)}=0\}\cup\{Z_2^{(2)}=0\}$$

$$\begin{aligned}
A_{00}^{(2)}&=\{(s,\xi_2,Z_0^{(2)},W_{01}^{(2)},W_{02}^{(2)})=(s,\xi_2,0,-1,0)\}\subset D_1^{(2)}\\
A_{01}^{(2)}&=\{(s,\xi_2,Z_1^{(2)},W_{10}^{(2)},W_{12}^{(2)})=(s,\xi_2,0,-1,0\}\subset D_1^{(2)}\\
A_{02}^{(2)}&=\{(s,\xi_2,Z_2^{(2)},W_{20}^{(2)},W_{21}^{(2)})=(s,\xi_2,0,0,0)\}\subset D_1^{(2)}\cap D_1^{(1)}
\end{aligned}$$

このとき $D_1^{(2)}$ は $X^{(2)}$ に誘導された Pfaff 系の特異点であるが、$G(1,1,3)(\alpha)$ の解の定める leaf の閉包に含まれる可能性のある点は、$D_1^{(2)}$ の部分集合 $A_{00}^{(2)},A_{01}^{(2)}\subset D_1^{(2)}$ となる。$A_{02}^{(2)}$ は inaccessible singularity である。

$D_1^{(2)}$ の部分多様体 $A_{00}^{(2)}$ に沿って3回目の blow up を行い、得られた多様体を $X^{(3)}$ とする。$D^{(0)},D^{(1)},D_1^{(2)}$ の porper transform を同じ記号で表し、新しく現れる exceptional divisor を $D_1^{(3)}$ とする。

$(Z_0^{(3)},W_{01}^{(3)},W_{02}^{(3)})\in\mathbb{C}^3,(Z_1^{(3)},W_{10}^{(3)},W_{12}^{(3)})\in\mathbb{C}^3,(Z_2^{(3)},W_{21}^{(3)},W_{22}^{(3)})\in\mathbb{C}^3$ をとり次の変換を考える。

$$Z_0^{(2)}=Z_0^{(3)},\quad W_{01}^{(2)}=-1+Z_0^{(3)}W_{01}^{(3)},\quad W_{02}^{(2)}=Z_0^{(3)}W_{02}^{(3)}$$

$$Z_0^{(2)}=Z_1^{(3)}W_{10}^{(3)},\quad W_{01}^{(2)}=-1+Z_1^{(3)},\quad W_{02}^{(2)}=Z_1^{(3)}W_{12}^{(3)}$$

$$Z_0^{(2)}=Z_2^{(3)}W_{20}^{(3)},\quad W_{01}^{(2)}=-1+Z_2^{(3)}W_{21}^{(3)},\quad W_{02}^{(2)}=Z_2^{(3)}$$

$$D_1^{(3)}\quad=\quad\{Z_0^{(3)}=0\}\cup\{Z_1^{(3)}=0\}\cup\{Z_2^{(3)}=0\}$$

$$
\begin{aligned}
A^{(3)}_{00} &= \{(s,\xi_2,Z^{(3)}_0,W^{(3)}_{01},W^{(3)}_{02})=(s,\xi_2,0,W^{(3)}_{01},\tfrac{\xi_2}{\eta})\}\subset D^{(3)}_1\\
A^{(3)}_{01} &= \{(s,\xi_2,Z^{(3)}_1,W^{(3)}_{10},W^{(3)}_{12})=(s,\xi_2,0,0,0\}\subset D^{(3)}_1\cap D^{(2)}_1\\
A^{(3)}_{02} &= \{(s,\xi_2,Z^{(3)}_2,W^{(3)}_{20},W^{(3)}_{21})=(s,\xi_2,0,\tfrac{\eta}{\xi_2},W^{(3)}_{21})\}\subset D^{(3)}_1
\end{aligned}
$$

このとき $D^{(3)}_1$ は $X^{(3)}$ に誘導された Pfaff 系の特異点であるが、$G(1,1,3)(\alpha)$ の解の定める leaf の閉包に含まれる可能性のある点は、$D^{(3)}_1$ の部分集合 $A^{(3)}_{00},A^{(3)}_{02}\subset D^{(2)}_1$ となる。$A^{(3)}_{01}$ は inaccessible singularity である。

ここで、$\xi_2=0$ のときは $A^{(3)}_{00}$ 及び $A^{(3)}_{02}$ は inaccessible singularity になってしまうので以下 $\xi_2\neq 0$ とする。

$A^{(3)}_{00}$ に沿って4回目の blow up を行い多様体 $X^{(4)}$ を得る。現れる proper transform を $D^{(0)},D^{(k)}_1(k=1..3)$、新しく現れる exceptinal divisor を $D^{(4)}_1$ とする。
$(Z^{(4)}_0,W^{(4)}_{01})\in\mathbb{C}^2,(Z^{(4)}_1,W^{(4)}_{10})\in\mathbb{C}^2$ をとり次の変換を考える。

$$Z^{(3)}_0=Z^{(4)}_0,\quad W^{(3)}_{02}=\frac{\xi_2}{\eta}+Z^{(4)}_0W^{(4)}_{01}$$

$$Z^{(3)}_0=Z^{(4)}_1W^{(4)}_{10},\quad W^{(3)}_{02}=\frac{\xi_2}{\eta}+Z^{(4)}_1$$

$$D^{(4)}_1 = \{Z^{(4)}_0=0\}\cup\{Z^{(4)}_1=0\}$$

$$
\begin{aligned}
A^{(4)}_{00} &= \{(s,\xi_2,W^{(3)}_{01},Z^{(4)}_0,W^{(4)}_{01})=(s,\xi_2,W^{(3)}_{01},0,\tfrac{2}{\eta})\}\subset D^{(3)}_1\\
A^{(4)}_{01} &= \{(s,\xi_2,W^{(3)}_{01},Z^{(4)}_1,W^{(4)}_{10})=(s,\xi_2,W^{(3)}_{01},0,\tfrac{\eta}{2}\}\subset D^{(3)}_1
\end{aligned}
$$

$X^{(4)}$ に誘導された Pfaff 系の $D^{(4)}_1$ に含まれる特異点は $D^{(4)}_1$ の余次元1の部分多様体 $A^{(4)}_{00}\subset D^{(4)}_1$ である。。このとき、$D^{(4)}_1\backslash\{A^4_{00},A^3_{01}\}$ の点を通るすべての leaf はファイバー空間 $X^{(4)}\to B$ のファイバーに含まれる。

$X^{(4)}$ を $A^{(4)}_{00}$ に沿って5回目の blow up を行い多様体 $X^{(5)}$ を得る。前と同様に、proper transform を $D^{(0)},D^{(k)}_1(k=1..4)$ で表し、新しく現れる exceptional divisor を $D^{(5)}_1$ とかく。
$(Z^{(5)}_0,W^{(5)}_{01})\in\mathbb{C}^2,(Z^{(5)}_1,W^{(5)}_{10})\in\mathbb{C}^2$ をとり次の変換を考える。

$$Z^{(4)}_0=Z^{(5)}_0,\quad W^{(4)}_{01}=\frac{2}{\eta}+Z^{(5)}_0W^{(5)}_{01}$$

$$Z^{(4)}_0=Z^{(5)}_1W^{(5)}_{10},\quad W^{(4)}_{01}=\frac{2}{\eta}+Z^{(5)}_1$$

$$D^{(5)}_1 = \{Z^{(5)}_0=0\}\cup\{Z^{(5)}_1=0\}$$

$$A_{00}^{(5)} = \{(s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(5)}, W_{01}^{(5)}) = (s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, 0, -\frac{3W_{01}^{(3)}\eta - \alpha_1\xi_2}{\eta^2})\} \subset D_1^{(3)}$$
$$A_{01}^{(5)} = \{(s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_1^{(5)}, W_{10}^{(5)}) = (s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, 0, 0\} \subset D_1^{(3)}$$

$X^{(5)}$ に誘導された Pfaff 系の $D_1^{(5)}$ に含まれる特異点は $D_1^{(5)}$ の部分多様体 $A_{00}^{(5)} \subset D_1^{(5)}$ である。。このとき、$D_1^{(5)} \backslash A_{00}^{(5)}$ の点を通るすべての leaf はファイバー空間 $X^{(5)} \to B$ のファイバーに含まれる。$A_{01}^{(5)}$ は inaccessible singularity である。

$X^{(5)}$ を $A_{00}^{(5)}$ に沿って 6 回目の blow up を行い多様体 $X^{(6)}$ を得る。前と同様に、proper transform を $D^{(0)}, D_1^{(k)} (k = 1..5)$ で表し、新しく現れる exceptional divisor を $D_1^{(6)}$ とかく。
$(Z_0^{(6)}, W_{01}^{(6)}) \in \mathbb{C}^2, (Z_1^{(6)}, W_{10}^{(6)}) \in \mathbb{C}^2$ をとり次の変換を考える。

$$Z_0^{(5)} = Z_0^{(6)}, \quad W_{01}^{(5)} = -\frac{3W_{01}^{(3)}\eta - \alpha_1\xi_2}{\eta^2} + Z_0^{(6)} W_{01}^{(6)}$$

$$Z_0^{(5)} = Z_1^{(6)} W_{10}^{(6)}, \quad W_{01}^{(5)} = -\frac{3W_{01}^{(3)}\eta - \alpha_1\xi_2}{\eta^2} + Z_1^{(6)}$$

$$D_1^{(6)} = \{Z_0^{(6)} = 0\} \cup \{Z_1^{(6)} = 0\}$$

$G(1,1,3)^{(6)}(\alpha)$ は $(\xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(6)}, W_{01}^{(6)}, s)$ の多項式になることがわかる。これは foliation が $(\xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(6)}, W_{01}^{(6)}, s) \in \mathbb{C}^4 \times B_{1112}$ 空間で特異点をもたず、この部分多様体の点を通る leaf はファイバー空間 $\pi : X^{(6)} \to B_{113}$ のファイバーに transversal であることを意味する。

5 定義多様体と初期値空間

各 accessible singularity に対して上の節で行った blow up の結果として得られる多様体を $\bar{E}_{113}$ とする。この多様体 $\bar{E}_{113}$ から $D_i^{(k)}$ を除いた多様体 $E_{113} := \bar{E}_{113} \backslash D_i^{(k)}$ を G(1,1,3) の定義多様体と呼ぶ。

5.1 G(1,1,3)

$G(1,1,3)(\alpha)$ のパラメータ $\alpha \neq 0$ を満たすとする。このときファイバー空間 $\pi : E_{113} \to B_{113}$ は次の性質をもつ。

Theorem 5.1 $G(1,1,3)(\alpha)$ から E_{113} に誘導された Pfaff 系によって定義される E_{113} の foliation の leaf はファイバーに transversal に交わる。

Theorem 5.2 *(painlevé property)* $s_0 \in B_{113}$ を始点とする B_{113} 内の任意の曲線 $\gamma : [0,1] \to B_{113}$ と $p \in \pi^{-1}(s_0)$ が与えられたとき、γ は p を通る *leaf* に持ち上げることができる。

Theorem 5.3 G(1,1,3) の定義多様体 E_{113} は $B_{(113)} \times \mathbb{C}^4$ の 10 枚の copy を貼り合わせることで与えられる。

G(1,1,3) の divisor の配置図は次のようになる。

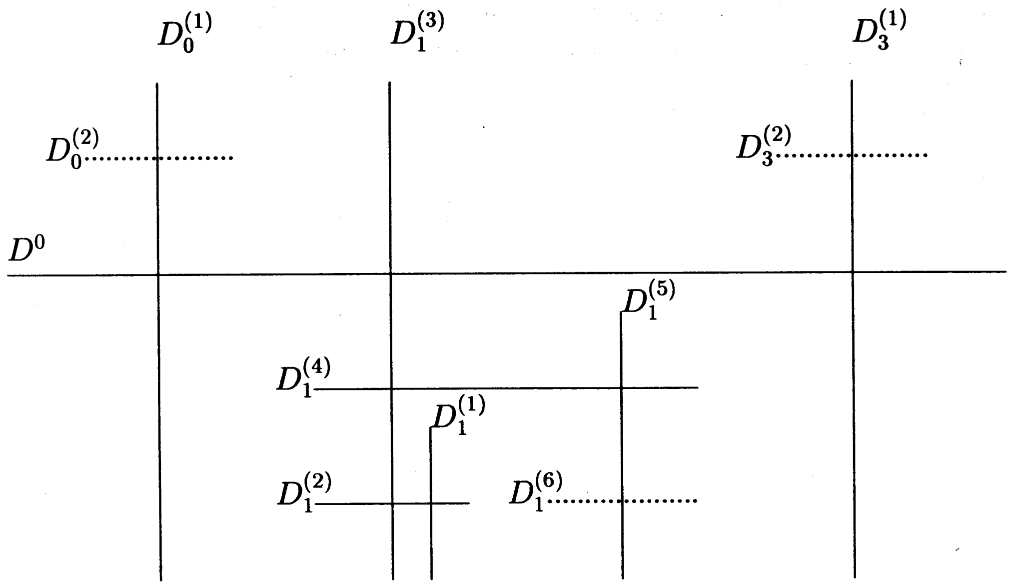

図 1　G(1,1,3)

参考文献

[1] H.Kimura: The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamilton structure,Ann.Mat.Pura.Appl.,155(1989),25-74

[2] H.Kimura: Uniform foliation associated the Hamilton system $\mathcal{H}_n$ Ann.Scuola.Norm.Sup.Pisa.Cl.Sci.(4),20(1993),1-60

[3] 木村弘信: Garnier 系の葉層構造 , 数学,41(1989),223-236

[4] 木村弘信: 退化 Garnier 系の初期値空間について , 数理解析研究所講究録 1133(2000)18-27

[5] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.yoshida: From Gauss to Painlevé ,Vieweg.,(1991)

[6] K.Okamoto: Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P.Painlevé, Espaces des conditions initiales, Japan.J.Math., 5(1979),1-79

[7] 岡本和夫: Painlevé 方程式 , 数学 32(1980),30-43

[8] T.Sioda and K.Takano: On some Hamilton Structures of Painlevé Systems Ⅰ,Funkcial.Ekvac.,40(1997),271-291

[9] T.Matano, A.Matumiya and K.Takano: On some Hamilton Structures of Painlevé Systems Ⅱ ,J.Math.Soc.,51(1998),843-866